

Los valores y la imagen de las matemáticas: una perspectiva filosófica

Paul Ernest

Centro de Educación. Universidad de Exeter. Inglaterra

Este artículo describe la relación existente entre la concepción generalizada de las matemáticas como una ciencia fría, abstracta e inhumana y su condición matemática de filosofía absolutista. Esta imagen se relaciona con la existencia de valores «separados» que hacen que las matemáticas sean un filtro crítico para denegar el acceso a muchas áreas de estudio y a profesiones de éxito y bien remuneradas en los países occidentales del área anglófono. Como contraste, surge la imagen humanizada de las matemáticas, basada en valores «vinculados» y que encuentra su soporte académico en las recientes teorías falibilistas de las matemáticas. Argumentamos que aunque ambas visiones filosóficas crean problemas y cambios en la manera de impartir las clases, no hay una relación directa que lo confirme. Concluimos afirmando que son probablemente los valores los que determinan el tipo de clases que se imparten y la imagen apreciación que los alumnos y las alumnas se hacen de las matemáticas (e indirectamente la imagen que se hace la sociedad de ellas).

Generalmente, las matemáticas son consideradas como algo difícil, frío, abstracto, teórico y que se escapa a la razón, pero a la vez como algo importante y característico del género masculino. Además, se las considera remotas e inaccesibles para todos aquellos que no sean muy inteligentes o que no tengan la mente preparada para las matemáticas. En el Reino Unido hay muchas personas que en su vida profesional utilizan a diario matemáticas a un alto nivel de competencia para realizar cálculos, hacer gráficos y para trabajar con su ordenador y aún así siguen diciendo que no se les dan las matemáticas. En comparación con la desgracia de ser analfabeto, el anumerismo es exhibido en muchos casos con orgullo entre las personas cultas de los países anglosajones occidentales.

En realidad, esto no significa que tales personas sean incompetentes del todo con los números, ya que no tienen problemas con las matemáticas que usan diariamente, sino que se sienten incapaces de afrontar las matemáticas académicas. La aritmética, las matemáticas contextuales, incluso las etnomatemáticas se entienden como algo distinto a las matemáticas escolares o académicas, ya que consideran que estas últimas se acercan más a su realidad. A pesar de que la mayoría de las aplicaciones de las matemáticas en la vida social se pueden ver a diario en los medios de comunicación, en las emisiones deportivas y en la retransmisión del tiempo y hasta en la información económica y social, la gente ha optado por dejarlas al margen de su vida cotidiana. De esta manera, podemos concluir diciendo que la imagen popular de las matemáticas es negativa y se las considera como algo remoto y extraño para muchos, tanto a nivel profesional como a nivel personal.

Muchas personas asocian las matemáticas con la ansiedad y el fracaso. En una encuesta realizada por Brigid Sewell para la agencia Crockcroft Inquiry acerca de las aptitudes de los adultos con la aritmética, se preguntó a una muestra de adultos tomada en la calle si podían contestar algunas preguntas. La mitad de ellos se negaron a contestar muchas de las

preguntas cuando supieron que la encuesta estaba relacionada con las matemáticas e incluso mostraron actitudes negativas. Actitudes extremadamente negativas, tales como la fobia a las matemáticas, sólo ocurren probablemente en una pequeña minoría de personas en las sociedades occidentales, y no son en absoluto significativas en otros países. Sin embargo, se trata de un fenómeno importante ya que nunca he oído hablar de una fobia a las letras, aunque la literatura sea igual de importante que la aritmética.

La imagen pública de las matemáticas es un valor a tener en cuenta cuando hablamos de educación matemática, y es particularmente importante debido a su significado social. Las matemáticas sirven como «filtro» crítico para controlar el acceso a muchas áreas de estudios avanzados y a los trabajos con más éxito y mejor pagados. Este uso de las matemáticas como filtro se desarrolla con trabajos que tienen que ver con aspectos científicos y tecnológicos, pero también se extiende a otros terrenos, incluyendo la educación, las profesiones de dedicación humanitaria y los servicios financieros.

Además, muchos adultos que no han completado sus estudios, no han sido considerados como ciudadanos matemáticamente preparados para poder emitir juicios críticos de manera independiente en lo que se refiere al sostenimiento matemático de decisiones políticas y sociales importantes.

Si la imagen de las matemáticas es un obstáculo innecesario que evita que todos puedan acceder a ellas, y también impide su total participación en la moderna sociedad democrática, entonces esta imagen es un gran mal social. Por supuesto, el problema no se resolverá sólo con cambiar la imagen que poseen actualmente las matemáticas. Además, la naturaleza de los encuentros entre los ciudadanos y las matemáticas tiene que cambiar, necesitan ser humanizados. Es necesario un análisis semiótico del lenguaje matemático para desvelar los aspectos coercitivos del mismo. Los objetivos de las clases tradicionales eran instruir a los alumnos para llevar a cabo ciertos procedimientos simbólicos; hacer, no pensar; hacer las cosas de manera automática, y no ser un pensador independiente con juicio crítico. Esto juega un decisivo papel en la deshumanización de las matemáticas y en el alumno. Resistirse puede significar la adopción de una actitud negativa hacia las matemáticas. Este análisis es el tema principal de mi actual estudio y no voy a desarrollarlo aquí. En lugar de esto, en este artículo estudio cómo las concepciones o filosofías de las matemáticas que se han extendido en las aulas (asociadas a los valores del profesorado y de la clase en si misma), juegan un papel muy importante en la concepción de la imagen que alumnos y alumnas se formarán de las matemáticas.

La imagen popular negativa de las matemáticas tienen que ver con las ideas desarrolladas por una filosofía que es denominada «absolutista». Bajo ese punto de vista las matemáticas son consideradas como un cuerpo de sabiduría objetivo, absoluto, cierto e inmutable, que se apoya en las bases firmes de la lógica deductiva. Muchas de las perspectivas filosóficas del siglo xx relacionadas con las matemáticas, como por ejemplo, el Logicismo, el Formalismo, e incluso el Intuicionismo y el Platonismo, podrían considerarse en este sentido teorías absolutistas.

Es necesario enfatizar que estas filosofías absolutistas de las matemáticas no tratan de describir las matemáticas o el conocimiento matemático, sino que se interesan por el proyecto epistemológico de proveer de sistemas rigurosos que garanticen el conocimiento matemático (siguiendo la temprana crisis de fundamentos de las matemáticas que se desarrolla a raíz de la introducción de la teoría de los conjuntos infinitos de Cantor).

Muchas de las acusaciones de absolutismo en sus variadas formas se derivan de su identificación con la rígida estructura lógica desarrollada para estos propósitos

epistemológicos. Aun pudiendo decir que el conocimiento matemático absolutista está pasado de moda, podríamos descubrir nuevas teorías y verdades que añadir. Sobrehumanas e históricas, para la historia de las matemáticas es irrelevante la naturaleza y la justificación del conocimiento matemático; es un conocimiento completamente aislado, que tiene lugar para ser útil por su validez universal; por la misma razón no depende de valores ni de culturas.

El resultado, por consiguiente, es una imagen de las matemáticas criticada filosóficamente como algo rígido, fijo, lógico, absoluto, inhumano, frío, objetivo, puro, abstracto, remoto y que sobrepasa la razón. En definitiva, la imagen negativa de la que habíamos hablado. Si es así como muchos filósofos, matemáticos y profesores ven su asignatura no es difícil darse cuenta que ésta es la imagen que ofrecen al público. Desde mi punto de vista, se puede culpar a la filosofía de las matemáticas al menos parcialmente de esta imagen negativa debido a la obsesión del siglo XXI por el fundamentalismo epistemológico.

En la escuela se puede aplicar un punto de vista absolutista dando a alumnos y alumnas tareas matemáticas rutinarias e inconexas que sirvan de aplicación en los procedimientos estudiados. Esto también se puede potenciar haciendo hincapié en que cada tarea tiene una única respuesta, correcta, fija y objetiva, unida a la desaprobación y la crítica de cualquier fracaso que impida obtener este tipo de respuestas. Esto podría no ser lo que los matemáticos consideran matemáticas, pero el resultado es, no obstante, una concepción absolutista de la asignatura. En algunos casos, lo que se obtiene como resultado es una clara fobia a las matemáticas.

Las matemáticas escolares versus las matemáticas especializadas de los matemáticos

Podría parecer que la imagen pública de las matemáticas es, en muchos casos, la correcta. Sin embargo, ante dicha conclusión deberíamos tener en cuenta algunas consideraciones. Es necesario distinguir entre las matemáticas como disciplina (es decir, lo que los matemáticos profesionales entienden por matemáticas), de las matemáticas escolares. Las matemáticas que se estudian en la escuela no son exactamente una parte de la disciplina general. Por el contrario, tienen que ser vistas como una disciplina diferente, que abarca algunos temas elementales como, por ejemplo, los números, la medida, el álgebra, la geometría, la estadística, la probabilidad, la informática, y la resolución de problemas. Todo esto se estudia no sólo por el simple placer de saberlo, sino para su aplicación práctica, sus aplicaciones transversales en el resto del currículum y como base de un estudio más amplio. Muchos de los contenidos matemáticos que se estudian en el colegio se centran más en los terrenos de la competencia numérica, de las matemáticas contextuales y de las matemáticas comerciales e industriales, que en lo que realmente es la disciplina matemática en sí. Por poner un ejemplo, el principal dominio de las matemáticas puras, con sus sistemas axiomáticos y las rigurosas demostraciones de teoremas es totalmente irrelevante en la escuela.

Una vez aclarada esta discrepancia, observamos que las matemáticas escolares no tendrían por qué tener esa mala imagen de la que hemos hablado. De hecho, la opinión generalizada de los profesores de matemáticas es que las matemáticas escolares deben estar en contra de esa mala imagen y contrarrestarla con una imagen atractiva, demostrando que son útiles y despertando la motivación de alguna otra forma. Esto es, satisfaciendo en suma sus funciones sociales. Las matemáticas escolares no pueden verse influenciadas por las ideas de los matemáticos ya que para que puedan ser tomadas en cuenta tendrían que ser humanizadas y adaptadas a las aplicaciones sociales. Por ello no podemos considerar nada de

eso que los profesionales llaman «la verdadera naturaleza» de la ciencia matemática.

Sin embargo, no se debería de quitar a los matemáticos la potestad para adaptar el currículum a sus necesidades, ya que son ellos quienes, ejerciendo este poder, pueden cambiar esa mala fama de las matemáticas. De forma inmediata pueden lograrlo seleccionando tanto la forma como el contenido de los currículos nacionales de matemáticas. Por otra parte, también pueden influir en las futuras promociones de profesores de matemáticas, en los que desarrollan los currículos y en el profesorado actual, inculcándoles la necesidad de comunicar la cultura de las matemáticas (académicas) a aquello que desarrollan en la práctica la educación matemática.

En segundo lugar, hay un creciente número de opiniones que afirman que las filosofías absolutistas de las matemáticas están cometiendo un gran error al concebir la falsa esperanza de proveer al conocimiento matemático de un carácter absoluto y eternamente inmutable. Debido a una serie de profundos problemas filosóficos y tecnológicos, entre los que hay que incluir los teoremas incompletos de Gödel, esos fundamentos en los que se basa la teoría absolutista no se dan. Esta «pérdida de certidumbre»¹⁶ no representa una pérdida de conocimiento. Si nos fijamos en la física moderna donde el descubrimiento de la falta de certidumbre de la relatividad y de la física cuántica indican los límites de la epistemología actual, entonces los límites falibilísticos del conocimiento matemático representan un incremento en el metaconocimiento. Para la humanidad las demostraciones matemáticas son las garantías más fiables del conocimiento. Pero es necesario admitir que las demostraciones y teorías también pierden credibilidad y fuerza y no se las puede considerar como algo absoluto y eterno. A modo de ilustración, se puede tener en cuenta la controversia desarrollada a raíz de la demostración de la conjetura de Fermat desarrollada por Andrew Wiles.

En tercer lugar, hace algunas décadas surgió una nueva oleada de filosofías matemáticas «falibilistas» que han ido ganando adeptos porque proponen una imagen muy distinta a la que conocíamos de las matemáticas. Esta nueva imagen nos presenta a las matemáticas como algo humano, corregible, enmarcado históricamente y variable.

Las filosofías falibilistas de las matemáticas

Kitcher y Aspray han descrito una novedosa tradición en la filosofía matemática que enfatiza la práctica de la parte humana de las matemáticas. Esta posición ha sido llamada cuasi-empirista y falibilista, y está asociada con el pensamiento constructivista y post-modernista de la educación, la filosofía, y las ciencias sociales. Un creciente número de filósofos de las matemáticas y matemáticos actuales están de acuerdo con el punto de vista falibilista de las matemáticas".

Los puntos de vista falibilistas ven las matemáticas como el producto de procesos sociales. El conocimiento matemático es entendido como algo que puede ser falible y está sujeto a revisión constantemente, tanto en términos conceptuales y teóricos como en sus demostraciones. Consecuentemente, este punto de vista acepta como materia filosóficamente legítima las prácticas de los matemáticos, su historia y sus aplicaciones y el lugar de las matemáticas en la cultura humana, incluyendo cuestiones de valores y la educación.

Resumiendo, muestra el lado humano y las bases de las matemáticas en su totalidad. La teoría falibilista no rechaza el papel de la estructura en las matemáticas. Sin embargo, sí

rechaza la noción de las matemáticas como algo único, fijo y como una estructura jerárquica que no varía. En lugar de tener esta concepción, afirma que las matemáticas están formadas por muchas estructuras superpuestas. Éstas, con el curso de la historia, crecen, se colapsan, y continúan creciendo como los icebergs en los mares del Ártico o como los árboles en el bosque.

El falibilismo rechaza la imagen absolutista de las matemáticas que ya habíamos descrito en este ensayo como una tergiversación y como causa de su mala imagen. Sin embargo, afirma que éstas nos muestran dos caras, una conocida y otra que desconocemos. En la parte conocida, se sirve al público platos matemáticos perfectos, como si se estuviera en un restaurante refinado. Aquí, el carácter absolutista de las matemáticas es preservado.

A la vez, a espaldas de todo esto, los matemáticos están creando nuevos conocimientos entre el desorden, el caos y todos los rasgos humanos ineludiblemente asociados al esfuerzo. El falibilismo admite ambas esferas: los procesos y los productos de las matemáticas han de ser considerados como parte esencial de la disciplina. Para ser más concretos, esa falsa imagen de perfección debe ser eliminada.

Una de las innovaciones asociadas a la teoría falibilista es la reconceptualización de la naturaleza de las matemáticas. Las matemáticas ya no seguirán siendo definidas como un cuerpo de conocimiento puro y abstracto que existe en una esfera superhumana y objetiva (the World 3 de Popper). En su lugar, el nuevo concepto asocia las matemáticas con los conjuntos de las prácticas sociales, cada uno con su historia, con sus personas, con sus instituciones y sus situaciones sociales, formas simbólicas, propósitos y relaciones de poder. De esta manera, las investigaciones matemáticas académicas son el resultado de tales prácticas (o más bien una multiplicidad de prácticas cambiantes y conectadas).

Asimismo, tanto las etnomatemáticas como las matemáticas escolares representan conjuntos inequívocos de tales prácticas. Ambas están íntimamente relacionadas debido a que los resultados simbólicos de una práctica son recontextualizados y reproducidos en la otra.

Es importante distinguir entre la epistemología falibilística (o absolutista) de las matemáticas y los informes falibilistas que tratan de la naturaleza de las mismas. La primera es una posición filosófica estrictamente definida debido a su naturaleza epistemológica y a la justificación del conocimiento matemático. Sin embargo, la segunda es un simple informe descriptivo de las matemáticas en el más amplio sentido de la palabra. Normalmente, ambas ideas van unidas. Pero si somos estrictos, el absolutismo epistemológico puede promover aspectos de la visión falibilista en lo que respecta a la naturaleza de las matemáticas, incluyendo, por ejemplo, que los matemáticos son propensos al error y a la publicación de teorías que pueden ser defectuosas, que los seres humanos podemos descubrir el conocimiento matemático mediante una gran variedad de medios y significados; que los conceptos matemáticos son constructos históricos (pero sus verdades son objetivas); que es conveniente un acercamiento más humano a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas, etc. Además, un falibilista epistemológico podría afirmar que, aunque el conocimiento matemático es un contingente de construcción social, en la medida en que es aceptado de esta manera por la comunidad matemática se define como algo invariable y así debería ser transmitido a las nuevas generaciones de alumnos y alumnas.

A esto se puede añadir que las cuestiones pertenecientes a las matemáticas escolares sólo pueden ser consideradas ciertas o falsas en lo referido a su cuerpo convencional de conocimiento. Lo que defiendo con estas ideas es que hay una fuerte analogía entre el absolutismo epistemológico (AE), la visión absolutista de la naturaleza de las matemáticas (VA) y la imagen fría y objetiva de las matemáticas que todos conocemos (IOM), pero sin

embargo, no existe necesariamente una conexión lógica entre ellas. Estos argumentos, que se basan en esas uniones por analogía, tienen una doble implicación, es decir, $AE \rightarrow AV \rightarrow IOM$ que es la ecuación resultante que usamos para apoyar la teoría falibilista (reduciendo el absolutismo al absurdo, claro está). Otro argumento, que es claramente equivalente al anterior, es que las matemáticas están consideradas como algo que puede fallar, como un constructo humano, cargado de valor y que se desarrolla dentro de un contexto. Por lo tanto, no $IOM \rightarrow no AV \rightarrow no AE$. Es decir, el conocimiento matemático no es objetivo ni está en absoluto fundamentado en la lógica.

Desde la perspectiva epistemológica absolutista, esto es un absurdo y es el arma que se usa para atacar al falibilismo. Mi conclusión es que ninguno de los dos argumentos es lógicamente válido, porque las implicaciones que los componen no son correctas. Para ser más claro, tengo que volver a la idea filosófica de las matemáticas, que es lo que explicaremos a continuación.

La imagen de las matemáticas escolares

Hemos descrito dos puntos de vista filosóficos relacionados con las matemáticas. Pero, ¿cuál de ellos refleja la imagen que tenemos de las matemáticas en la escuela? Nos vemos obligados a decir que la experiencia que tienen la mayoría de los estudiantes de las matemáticas de sus días de colegio, confirma esa imagen absolutista de las matemáticas como algo frío, absoluto e inhumano. Por regla general, los profesores que imparten esta asignatura han confirmado esta teoría. Normalmente, aunque no siempre, esta imagen absolutista de las matemáticas es la causante del rechazo y las actitudes negativas que existen hacia ellas. Sin embargo, en mi investigación sobre las actitudes y creencias del alumnado que estudia para profesores de matemáticas me surgió un contraejemplo de dicha teoría. Encontré un subgrupo de especialistas matemáticos que combinaba concepciones absolutistas de la materia con actitudes muy positivas hacia las matemáticas y su enseñanza. En cambio, entre los futuros profesores de escuelas primarias no especialistas en matemáticas encontré una correlación aproximada entre las concepciones falibilistas y las actitudes positivas hacia las matemáticas y su enseñanza. Por ello, a modo de conclusión, podemos decir que las conexiones entre las creencias y actitudes hacia las matemáticas son complejas, con múltiples facetas y nada generalizables.

Estudios realizados en las últimas dos décadas sobre las actitudes que muestran los niños por esta asignatura, demuestran que el rechazo va unido generalmente a la parte de la asignatura cursada en el colegio, sobre todo en los años de escolarización elemental. Por regla general, las actitudes de los alumnos en los últimos años de escolarización se vuelven más neutras y las actitudes extremadamente negativas, son relativamente raras. Presumiblemente, este cambio de actitud es debido a la llegada de la adolescencia, a las relaciones de grupo, al impacto que producen los exámenes competitivos, sin mencionar la reputación de las matemáticas tanto dentro como fuera del colegio.

Sin embargo, el tipo de matemáticas impartidas en muchos colegios liberales, no sigue la teoría absolutista y ciertamente no tiene porque seguirla. Existen muchos informes que gozan de gran influencia que proponen una imagen de las matemáticas escolares humanizada y anti-absolutista (aunque no totalmente falibilista). El peso que ha ejercido este punto de vista educativo ha hecho que las matemáticas hayan sufrido una reforma progresiva en esa línea durante la última década. Recientemente (1995) un grupo de matemáticos protestó por el bajo nivel de los estudiantes de matemáticas que accedían a la universidad, y argüían que esto

ha sido causado por los progresistas en educación matemática que han rechazado el absolutismo y han promovido el constructivismo y las matemáticas investigativas. Sus observaciones sobre el hecho de que las competencias de los nuevos estudiantes de matemáticas en el Reino Unido son cada vez más bajas podrían ser correctas. Sin embargo, no hay pruebas que apoyen las causas imputadas, bien podría tratarse del resultado de los cambios en el currículum matemático y en el sistema de evaluación impuesto por el gobierno. Sin embargo, la realidad apunta al hecho de que, aunque un buen número de estudiantes opta por el examen de nivel A en el Reino Unido a los 18 años, este número va disminuyendo año a año en términos absolutos, y aquellos que logran superar la asignatura optan por seguir sus estudios en ramas como medicina, económicas, informática, etc., mientras que el número de alumnos que optan por seguir la carrera de matemáticas sigue bajando. Por eso, los matemáticos podrían estar siendo obligados a reclutar a sus sucesores de entre los de más bajo nivel de un grupo de estudiantes cada vez más restringido. ¿Podría ser este otro efecto de la amplia mala imagen que tienen las matemáticas a nivel social?

Las matemáticas. Los valores y el género

Un tema importante es la controversia existente entre las matemáticas y los valores. Es evidente que la imagen popular de las matemáticas está indudablemente devaluada. Esto nos hace cuestionarnos si hay algún escondido asunto detrás de la extendida imagen popular absolutista de las matemáticas. Los más radicales piensan que este tipo de imagen negativa descrita sirve a unos intereses conservadores en la comunidad matemática y en la sociedad en general. Con esto queremos decir que si las matemáticas se conocen como algo difícil, frío y abstracto, que va más allá de la razón, importantes y preferentemente masculinas, entonces se ofrece un acceso más sencillo a aquellos que las consideran de su propiedad, que se creen los dueños de los valores asociados a la cultura occidental y del sistema educativo en general. Esto favorece a los hombres, a las clases medias y a las mayorías étnicas de raza blanca³¹, al menos en países anglófonos como Australia, Estados Unidos, Canadá y el Reino Unido. Mis estudios acerca de la relación de las matemáticas con el género y los valores se restringen a estos países, y podrían no ser extensibles de manera apropiada a países latinos o mediterráneos como España. Además, el problema parece ser más serio en los países de habla anglosajona que en el resto. Por ejemplo, según G. Greer, «*hay (proporcionalmente) cinco veces más mujeres científicas en países americanos de habla latina que en los de habla inglesa*».

En países como éstos, los argumentos desvelan que la imagen popular de las matemáticas apoya los privilegios de tales grupos con ventaja, favoreciendo su entrada al campo de estudio, a la vez que coloca obstáculos para que los que no son miembros de estos grupos accedan a una educación de nivel superior y a puestos de trabajo importantes, especialmente a aquellos en los que las ciencias y la tecnología juegan un papel esencial. ¿Cómo puede ocurrir esto? Para explicarlo mediante un ejemplo, ofreceré un informe parcial de la relación entre las matemáticas, los valores y el género.

Para empezar, muchos de los estudios realizados sobre la relación de las chicas con las matemáticas estudian los problemas causados por la percepción estereotipada de las matemáticas como un dominio masculino. Gilligan ha ofrecido una teoría acerca de la naturaleza de los valores como algo ligado al género. De acuerdo con esta teoría, se puede distinguir entre valores estereotipadamente femeninos, a los que Gilligan denomina «valores vinculados» y valores estereotipadamente masculinos, a los que llama «separados». Para cada uno de estos grupos de valores hay un conjunto de características determinadas. Los

vinculados valoran y se basan en las relaciones, las conexiones, la empatía, el cuidado, los sentimientos y la intuición, y tienden a lo holístico, y a los aspectos centrados en el ser humano y sus inquietudes. Por el contrario, los estereotipos «separados» valoran las reglas, la abstracción, la objetividad, la impersonalidad, la insensibilidad, la razón desapasionada y el análisis. Esta visión tiende a ser atomista y se centra más en lo material que en lo personal. La teoría de Gilligan incluye una serie de etapas del desarrollo moral basada en la «ética del cuidado» como característica de los valores vinculados, que ella contrapone a la teoría del desarrollo moral de Kohlberg que se basa en la ética de la justicia caracterizada como «separación»

En algunas ocasiones, debemos tratar esta teoría con cuidado. En primer lugar, no podemos afirmar que los valores separados son propios de los hombres y los vinculados a las mujeres. Tenemos que tener en cuenta que hablamos de estereotipos y que en realidad todos los seres humanos tenemos por naturaleza un lado masculino y otro femenino. En realidad, somos una sola especie y las diferencias entre sexo masculino y sexo femenino no son tan profundas como lo son nuestros aspectos comunes.

En segundo lugar, ningún estudio ha podido hacer una dicotomía clara entre los valores masculinos y los femeninos. Bradbeck, basándose en estudios anteriores, argumenta que son más significativas las diferencias étnicas que las diferencias entre sexos. Las revisiones críticas de la evidencia de Larrabee sugiere que hay diferencias significativas entre el último período de la adolescencia y la etapa adulta que afectan al razonamiento moral, pero no sólo se basa en las etapas propuestas por Kohlberg. Por otro lado, es indicativa la tesis de Hoffman que expone que las chicas son más empáticas porque tienen menos reparo a la hora de exhibir sus reacciones emotivas en público.

A pesar de que todos los seres humanos tenemos un lado masculino y uno femenino, los valores estereotipadamente masculinos han dominado muchas de las instituciones y estructuras de la sociedad occidental, incluyendo las matemáticas y las ciencias, y se ha animado a los hombres a desarrollar y demostrar esos valores haciéndolos parte primordial de su personalidad. En la cultura occidental, estos valores separados (que culturalmente se han asociado al sexo masculino, de raza blanca y de clase dominante) han excluido a muchos - quizá la mayoría- de los seres humanos del campo de las matemáticas, a las que sienten como frías, lejanas, duras, desprovistas de afecto, rechazadas, neutrales, insensibles, impersonales, vacías, inhumanas, absolutas, objetivas, regidas por reglas, perfectamente racionales, masculinas, mecánicas, sin alma, muertas, fijas e hieráticas.

Actualmente, estos caracteres separados y las matemáticas están unidos en la cultura occidental, y esto se traduce en que las matemáticas se identifican como un dominio estereotipadamente masculino y como antitéticas a los estereotipos culturales femeninos.

Algunos investigadores (Burton, Fennema, Walkerdine, Walkerdine et al³⁴ y Ernest¹⁰), han ofrecido modelos de cómo impactan diferencialmente estos valores en las mujeres. Uno de los modelos más importantes es el de Isaacson que incorpora un gran número de factores diferentes, incluyendo experiencias de niñas y mujeres (tanto en la escuela como fuera de ella) que median con su influencia en los sistemas de creencias de las chicas y las mujeres. Destaca los términos «doble conformidad» e «inducción coactiva». El primero es un concepto que debemos a Delamont. Este concepto describe el dilema existente en una situación donde confluyen dos ideas o expectativas mutuamente conflictivas a las que ajustarse. Desde que las matemáticas se han convertido en un estereotipo masculino, ajustarse a los estándares matemáticos entra en conflicto con hacerlo a estándares de feminidad. Esto, en su significado más simple, supone que las mujeres tienen que decidir entre ser femeninas o tener éxito con

las matemáticas. Si optan por las dos cosas, tendrán que vivir con la contradicción: matemáticas = no feminidad.

La inducción coactiva es el término que describe las presiones sociales que sufren las mujeres para ajustarse al estereotipo de feminidad. Las mujeres son recompensadas por elegir el camino de la feminidad convencional mediante la aprobación social en todos los ámbitos (padres, madres, parejas, chicos, profesores, sociedad...). Rechazar este papel significa renunciar a recompensas e incentivos muy considerables. Como la aprobación es algo extremadamente ansiado, la inducción es coactiva. Las chicas son forzadas por la necesidad a sucumbir a las presiones e inducciones arrolladoras para que acepten el papel convencional femenino.

Laacson afirma que ambos conceptos (la doble conformidad y la inducción coactiva) afectan fuertemente a la personalidad y al sistema de creencias internalizado de la mujer y la niña, incluyendo la naturaleza de la feminidad y el rol de las mujeres en la sociedad y la relación con su propia identidad como mujer. Estas creencias juegan un papel fundamental en la relación entre el concepto que la mujer tiene de sí misma con relación a las matemáticas, así como en relación a su desarrollo como estudiante de matemáticas.

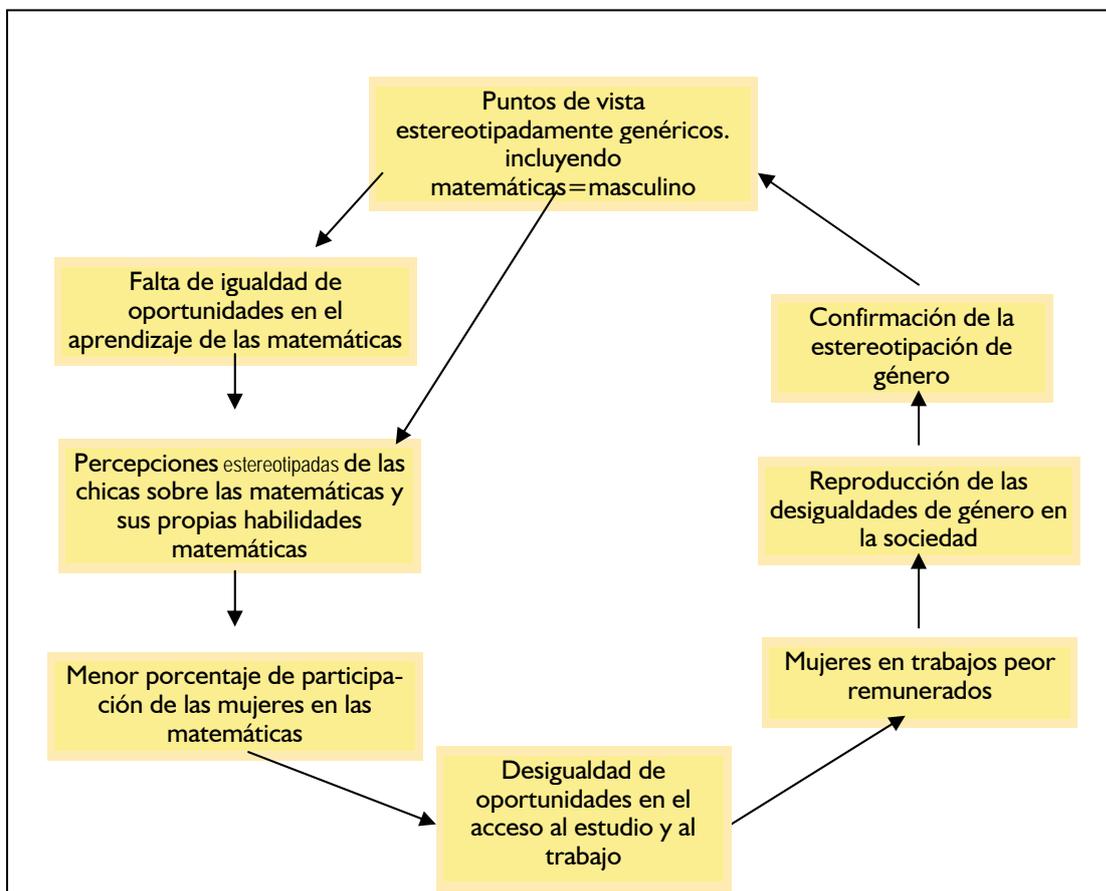
El cuadro número 1 ilustra cómo estos valores, estereotipos y creencias terminan convirtiéndose en un círculo vicioso que niega a las mujeres la igualdad de oportunidades. También nos muestra que la menor participación de chicas y mujeres en las matemáticas contribuye a disminuir sus oportunidades para acceder a estudios superiores y trabajos (el «filtro crítico» de Sells) y las deja en los trabajos peor remunerados. Esto hace que resurja la desigualdad de géneros en la sociedad, que se refuercen los estereotipos y establece un «régimen de verdad», que enfoca la cuestión como: matemáticas = género masculino, matemáticas = no femeninas y mujeres = seres inferiores, afirmaciones que se confirman y sostienen como «verdades vivas». El resultado es la desigualdad de oportunidades entre sexos en lo que se refiere a las matemáticas escolares, la reducción de expectativas de las chicas y la no consideración de los logros de las mujeres en el campo matemático. Las chicas interiorizan estos estereotipos y mitos, por lo que el resultado es todavía más negativo. Así se completa el círculo vicioso del que veníamos hablando. Sólo podremos hacer que se rompa atacando cada uno de los eslabones que lo forman. Una esperanza es que, en la escuela obligatoria, las chicas han ido alcanzando el nivel de los chicos. En 1994, por primera vez en el Reino Unido, las chicas de 16 años superaron a los chicos en los resultados de los exámenes. Sin embargo, en proporción, pocas tomaron decisiones posteriores ligadas a las matemáticas, por lo que el problema sigue ahí.

Las filosofías de las matemáticas. los valores y su relación con la educación

Si unimos todos los factores que hemos ido tratando, está claro que, como primera conclusión, hallamos un gran paralelismo entre la concepción absolutista de las matemáticas, la visión negativa de las matemáticas en la sociedad y el conjunto de valores separados descritos por Gilligan. Asimismo, encontramos un segundo paralelismo entre la concepción falibilista de las matemáticas, los valores vinculados descritos por Gilligan y la visión humanizada de las matemáticas promovida por la educación matemática moderna y progresista como un saber accesible, relevante desde el punto de vista de las personas y creativo.

Este segundo paralelismo podría utilizarse para mejorar la accesibilidad y la imagen pública de las matemáticas. Pero el análisis no puede acabar aquí. Hay que averiguar qué es lo que atrae a algunas personas de la imagen absolutista de las matemáticas. Ya hemos estudiado el caso de algunos estudiantes para profesores que prefieren esta visión.

Cuadro 1. El ciclo reproductivo de la desigualdad de género en educación matemática



También muchos matemáticos declaran su adhesión a las matemáticas justo por sus componentes absolutistas. Normalmente, profesores y matemáticos de forma común y consistente mantienen que el punto de vista absolutista sobre las matemáticas es neutral y libre de valores, pero reconocen que su enseñanza necesita adoptar valores humanistas y comprometidos. Esto sustenta el que hay una clara relación entre las filosofías de las matemáticas, los valores y la enseñanza.

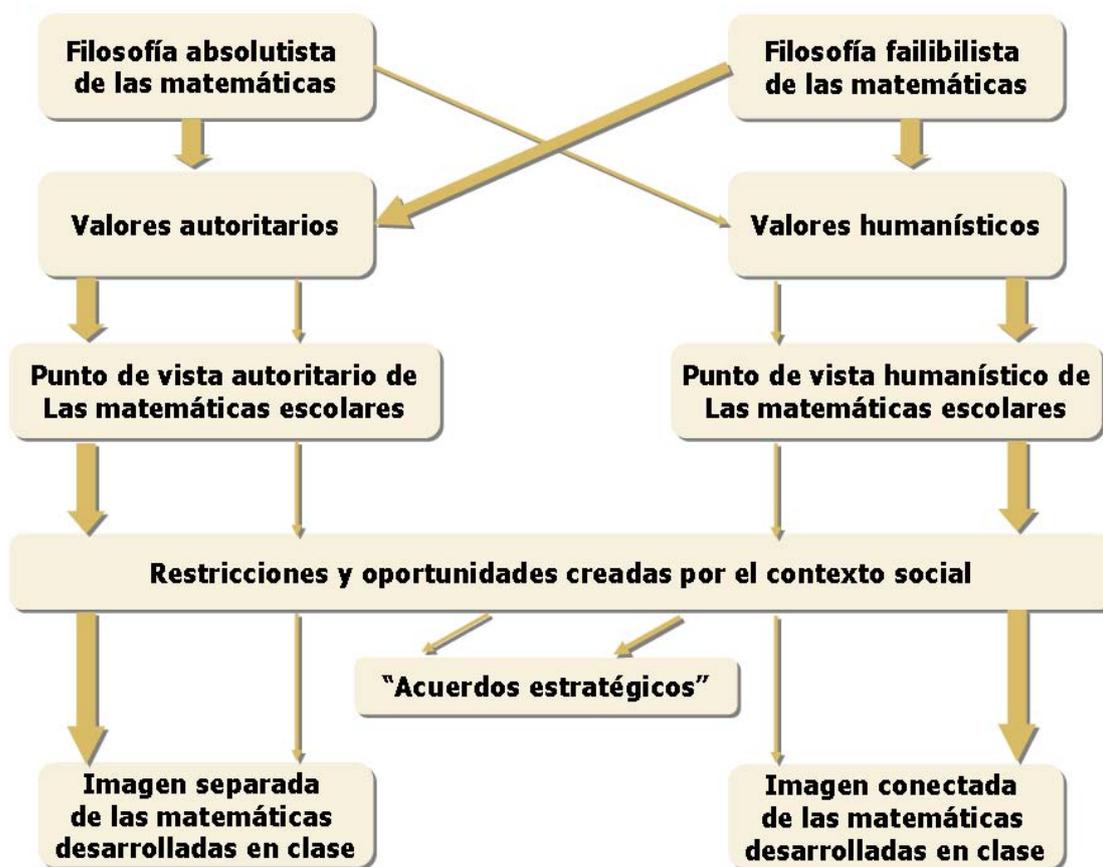
Una teoría con bastante aceptación es la que afirma que «toda pedagogía matemática, incluso si es apenas coherente, se basa en una filosofía de las matemáticas» (ver nota 45, p. 204), Otras teorías afirman que, a la vez, los métodos de enseñanza en matemáticas incorporan asunciones sobre la naturaleza de las matemáticas y que cualquier filosofía de las matemáticas trae consigo cambios importantes en la forma de impartir las clases. Estudios empíricos han confirmado que las ideas, creencias y preferencias del profesorado sobre las matemáticas influyen en su manera de impartir las clases (ver nota 49, p. 125). A modo de conclusión, podría decirse que cualquier filosofía de las matemáticas (incluyendo las de carácter personal) tiene muchas consecuencias educativas y pedagógicas cuando toman cuerpo en las creencias del profesorado, en los desarrollos del currículum o en los sistemas de evaluación. En otras ocasiones he dicho que las filosofías personales del profesorado sobre

las matemáticas, entendiéndolas como parte de su bagaje epistemológico y ético, tienen una gran influencia en sus adhesiones a las distintas concepciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Debido a esto y a los obstáculos y a las pocas oportunidades de llevarlas a la práctica en un contexto social, los matemáticos tienen vía libre para desarrollar sus propias teorías de enseñanza-aprendizaje, usar los textos y materiales curriculares que deseen y aplicar el currículum como más les guste. Tal modelo es parcialmente validado por el trabajo empírico.

Sin embargo, las consecuencias en las clases no tienen en general implicaciones estrictamente lógicas desde el punto de vista filosófico, sino que también hay que tener en cuenta otros valores, objetivos y asunciones para alcanzar tales conclusiones [10,51]. Porque el nexo no es sólo de implicación lógica, es teóricamente posible asociar una filosofía de las matemáticas con casi cualquier práctica o aproximación educativa. A este respecto, tanto la teoría cognitivista o neobehaviorista como el constructivismo radical a pesar de tener epistemologías totalmente opuestas (absolutista y falibilista respectivamente) intentan averiguar los conocimientos que tiene un alumno antes de recibir clases. Asimismo, un matemático tradicional puro y un constructivista social podrían estar a favor de un acercamiento multicultural a las matemáticas, aunque por diferentes razones (el primero, para humanizar las matemáticas, y, el segundo, para mostrarlas como una construcción social de toda la humanidad, es decir, por razones de justicia social).

Aunque no hay ninguna necesidad lógica para asociar una pedagogía de estilo transmisivo con el absolutismo, con una epistemología absolutista y objetivista y con una filosofía de las matemáticas determinada, a menudo ocurren tales asociaciones. Esto se debe, presumiblemente, a las similitudes y afinidades entre los diferentes aspectos de la filosofía de una persona, a su ideología, a sus valores y a sus creencias. Estas similitudes forman asociaciones, se reestructuran y se adaptan dinámicamente de forma coherente y terminan configurando la personalidad de cada cual (aunque también podemos encontrar compartimentos y hendiduras).

Un modelo más simple podría ser conjeturado, sugiriendo que los valores (de posición) de un profesor, el desarrollo del currículum y el centro escolar juegan un papel esencial en la mediación entre las filosofías personales de las matemáticas y la imagen de las matemáticas que se comunica en la clase. El cuadro 2 muestra cómo una filosofía absolutista de las matemáticas combinada con valores separados, centrados en las cosas o autoritarios pueden desarrollar una visión autoritaria de las matemáticas escolares. Esto, sujeto a los obstáculos y oportunidades que genera el contexto social del colegio, suele dar lugar a una imagen separada de las matemáticas en la clase. Asimismo, una filosofía de las matemáticas falibilista combinada con valores humanísticos, vinculados, centrados en las personas, puede dar lugar a una imagen más humana de las matemáticas escolares. Si nos ceñimos a las mismas restricciones del contexto, esto da lugar a una imagen vinculada de las matemáticas en clase. Estos dos conjuntos de relaciones posibles se muestran mediante flechas verticales. Representan la más sencilla relación entre filosofías, valores e imágenes de aula de las matemáticas.



El cuadro también nos muestra los posibles cruces entre ambos: como visión absolutista, si se combina con una imagen vinculada y con valores humanísticos puede dar lugar a un punto de vista humanista de las matemáticas escolares. Esto, sujeto a las restricciones sociales, puede desembocar en una imagen vinculada de las matemáticas en el aula. Una coexistencia entre las ideas progresistas de educación matemática y la creencia de la objetividad y neutralidad de las matemáticas puede darse, y de hecho se da, sobre todo entre el profesorado de matemáticas y los educadores. El falibilismo no tiene el monopolio en este tema. En casos como éstos, los valores vinculados son a menudo asociados a la educación y a la concepción que se tiene de las matemáticas escolares, antes que con las matemáticas académicas (la de los matemáticos). Esto queda ilustrado en el cuadro número 2 con las flechas negras más delgadas.

Teóricamente, es posible combinar una filosofía falibilista con valores separados, obteniendo como resultado una visión autoritaria de las matemáticas escolares. Esto, sujeto a los obstáculos y oportunidades que nos ofrece el contexto, puede dar lugar a una imagen separada de las matemáticas en el aula. Esto queda ilustrado en el cuadro número 2, pero es bastante improbable que ocurra, debido a la frecuente asociación del falibilismo con las teorías pedagógicas progresistas en la comunidad educativa matemática.

Finalmente, es posible que los obstáculos que ofrece el contexto social de la escuela sean tan poderosos que algunos profesores con visiones humanistas de las matemáticas se vieran obligados a seguir «acuerdos estratégicos» con los demás profesionales⁵³, por lo que la imagen de las matemáticas en el aula sería una imagen separada. Esto podría ser una consecuencia temporal de los obstáculos contextuales, pero si se convierte en algo permanente puede llegar a crear tensiones y estrés. Esto queda reflejado en el diagrama por

las flechas más delgadas y por las que están en negrita que se desvían a la izquierda hacia una imagen separada del aula bajo el impacto del contexto social. Estas flechas podrían venir de una visión absolutista (flechas delgadas) o de una visión falibilista (flechas en negrita), pero en ambos casos se cruzan. Estudios empíricos han confirmado que profesores con filosofías personales de las matemáticas bien distintas (absolutistas y falibilistas) se han visto coaccionados por el contexto social que rodea a la escuela y han tenido que cambiar su modo de impartir las clases a una manera más tradicional, es decir, siguiendo un modelo separado.

La mayoría de los trabajos realizados en el campo de la filosofía de la educación matemática, intentan aclarar la relación entre las filosofías de las matemáticas implícitas en las creencias del profesorado, en los textos, en el currículum, en los sistemas y las prácticas de evaluación matemática y en las prácticas y rasgos de las matemáticas en clase y en los resultados obtenidos con los alumnos. Hay gran cantidad de bibliografía sobre las creencias de los profesores, sus imágenes de las matemáticas y las actitudes en las que desembocan. Algunos estudios también recogen las opiniones de los alumnos. Aunque se han hecho muchos progresos, todavía queda mucho por hacer en este terreno y está claro que las relaciones son complejas y no están determinadas.

Conclusiones

He establecido una serie de dicotomías: la imagen tradicional versus la imagen humanística de las matemáticas, la filosofía absolutista versus la filosofía falibilista; los valores separados versus los valores vinculados, las clases que promueven imágenes de las matemáticas con valores separados versus las que promueven los valores vinculados. Ha habido dos hilos argumentativos principales. El primero decía que estas dicotomías son de alguna manera paralelas, es decir, que las frías imágenes tradicionales de las matemáticas, las filosofías absolutistas de las matemáticas, los valores separados y las clases de matemáticas que se imparten con este carácter separado son aspectos que trabajan juntos y se refuerzan unos a otros. Presumiblemente, la imagen negativa tan extendida de las matemáticas es producto de lo que yo denominé una imagen separada de las matemáticas en clase. De la misma manera, las imágenes públicas positivas de las matemáticas, las filosofías falibilistas de las matemáticas, los valores vinculados y las clases que se imparten bajo este tipo de valores, van unidas y se refuerzan mutuamente. Si ignoramos los factores que intervienen en el contexto, este análisis sugiere que si queremos cambiar esa extendida imagen pública negativa de las matemáticas, tenemos que cambiar la imagen comunicada por las matemáticas en las clases. Ésta es una conclusión importante y que no debería sorprendernos, incluso debería ayudarnos a reparar algunos de los problemas que hemos descrito antes (el género, el acceso a las matemáticas) para las matemáticas y quizá también para las ciencias y la tecnología.

El segundo hilo argumental pasa por el simple entendimiento y la aceptación del primero. Parece que los factores más influyentes en determinar la imagen comunicada de las matemáticas en la clase (y que desembocan finalmente en la imagen pública de las matemáticas) son los valores de los profesores junto con la concepción de las matemáticas escolares, más bien que las filosofías de las matemáticas incorporadas a las clases o a los profesores. Probablemente esto no nos sorprenda, ya que la materialización de estos valores incorporará el tipo de relación profesor-alumno, el grado de competitividad, el peso negativo de los errores, el grado de humillación pública experimentado como consecuencia de los fallos y otros factores que tienen un fuerte impacto en la autoestima y el autoconcepto de los jóvenes estudiantes de matemáticas.

Como en cualquier estudio basado en dicotomías, las ideas pueden estar algo simplificadas y pueden parecer incluso algo simplista, pero a veces no es posible encontrar una división clara en dos grupos. En mi análisis sobre las ideologías del currículum de matemáticas IO, sugería cinco tipos ideológicos básicos y más de una docena de componentes para cada ideología, y eso que era una simplificación. Sin embargo, modelos tan simplificados como éste pueden sugerir qué factores teóricos causan efectos importantes en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas y señalar fórmulas para solucionarlos y seguir adelante con las prácticas y los estudios en este respecto.

Finalmente, quiero apuntar a otra división social que es, en muchos aspectos, paralela a la de género, pero que podría tener todavía mayor impacto social a escala internacional. Nos referimos a la división dependiendo de la clase socioeconómica a la que se pertenezca. Algunos trabajos basados en valores separados, encuentran que éstos están positivamente asociados al nivel educacional. Un estudio realizado por Mellin-Olsen y otros colaboradores indica que los aprendices prefieren un estilo de enseñanza más concreta (vinculada), mientras que los estudiantes académicos prefieren una enseñanza más abstracta y teórica (separada). Datos recientes tomados en Australia, sugieren que la mayoría de estudiantes de los dos últimos años de la escuela obligatoria que optan por estudiar matemáticas y ciencias pertenecen a la clase socioeconómica alta, mientras que son muchos menos los que pertenecen a una clase social más humilde⁶¹. Después de analizar estas razones, podemos decir que el carácter actual de las matemáticas podría estar jugando un importante papel en la reproducción de diferencias sociales.

Notas

1. COCKCROFT, W.H., CHAIR (1982): *Mathematics Counts*. London. Her Majesty's Stationery Office.
2. MAXWELL, G. (1989) en ERNEST, P. (1989), *Mathematics Teaching: The State of the Art*. London. Falmer, pp. 221-226.
3. SELLS, L. (1973) en *Proceedings of the Conference on Minority Graduate Education*. Berkeley. University of California, pp. 37-49.
4. ROTMAN, B. (1993): *Ad Infinitum The Ghost in Turing's Machine: Taking God Out of Mathematics and Putting the Body Back in*. Stanford CA Stanford University Press.
5. BUERK, D. (1982): *For the Learning Of Mathematics*, n. 3 (2), pp. 19-24.
6. BUXTON, L. (1981): *Do You Panic About Maths?* London. Heinemann.
7. NCTM (1989): *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston. VA. National Council of Teachers of Mathematics.
8. HOWSON, A.G.; WILSON, B. (eds.) (1986): *School Mathematics in the 1990s*. Cambridge. Cambridge University Press.
9. SKOVSMOSE, O. (1994): *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Dordrecht. Kluwer.
10. ERNEST, P. (1991): *The Philosophy of Mathematics Education*. London. Falmer Press.
11. DAVIS, P.J.; HERSH, R. (1980): *The Mathematical Experience*. London. Penguin.
12. KITCHER, P. (1983): *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford. Oxford University Press.
13. LAKATOS, I. (1976): *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press.
14. TILES, M. (1991): *Mathematics and the Image of Reason*. London. Routledge.
15. TYMOCZKO, T. (ed.) (1986): *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Boston. Birkhäuser.
16. KLINE, M. (1980): *Mathematics the Loss of Certainty*. Oxford. Oxford University Press.

17. KITCHER, P.; ASPRAY, W. (1988) en W. ASPRAY y P. KITCHER, *History and Philosophy of Modern Mathematics*. . Minneapolis. University of Minesota Press, pp. 3-
18. GLASERSFELD, E. VON (1995): *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. Landan. Falmer Press.
19. RORTY, R. (1979): *Philosophy and the Mirror of Nature*. Princeton, N. J. Princeton University Press.
20. RESTIVO, S. (1992): *Mathematics in Society and History*. Dordrecht. Kluwer.
21. ERNEST, P. (ed.) (1994): *Mathematics, Education and Philosophy: An International Prespective*. London. Falmer Press.
22. STEEN, L.A., (1988) en *Science*, n. 240 (4852), pp. 611-616.
23. DAVIS, P.J. (1972) en *Amer. Mathematical Monthly*, n. 79, pp. 252-263.
24. POPPER, K.R. (1979): *Objective Knowledge, edición revisada*. Oxford. Oxford University Press.
25. DOWLING, P. (1988) en M. HARRIS (ed.): *Schools, Mathematics and Work*. London. Flamer, 1991, pp. 93-120.
26. ERNEST, P. (1988) en A. BORKAS (ed.): *Proceedings of PME-12*. Veszprem. Hungary, n. 1, pp. 288-295.
27. ERNEST, P. (1989): *Mathematics-related belief systems*. Poster presented at PME-13. Paris.
28. ASSESSMENT OF PERFORMANCE UNIT (1985): *A Review of Monitoring in Mathematics 1978 to 1982 (2 volúmenes)*. London. Department of Education and Science.
29. NCTM (1980): *An Agenda for Action*. Reston, VA National Council of Teachers of Mathematics.
30. NCC (1989): *Mathematics, Non-Statutory Guidance*. York. National Curriculum Council.
31. WALKERDINE, V. (1988): *The Mastery of Reason*. London. Routledge.
32. PILE, S. (1993): *The Daily Telegraph*, 15 de marzo, p. 19.
33. BURTON, L. (ed.) (1986): *Girls into Maths Can Go*. London. Holt, Rinehart and Winston.
34. WALKERDINE, V. AND THE GIRLS AND MATHEMATICS UNIT (1989): *Counting Girls Out*. London. Virago.
35. WEINER, G. (1980) en R. DEEM: *Schooling for Women's Work*. London. Routledge and Kegan Paul
36. GILLIGAN, C. (1982), *In a Different Voice*. Cambridge, M.A. Harvard University Press.
37. KOHLBERG, L. (1969): *Stages in the Development of Moral Thought and Action*. New York. Holt, Rinehart and Winston.
38. BRADBECK, M. (1983) en *Development Review*, n. 3, pp. 274-291.
39. LARRABEE, M.J. (1993): *An Ethic of Careo* London. Routledge.
40. HOFFMAN, M. (1977) en *Psychological Bull.*, n. 84, pp. 712-722.
41. FENNEMA, E. (1985) en *Educ. Studies in Math.*, n. 16, pp. 303-320.
42. ISAACSON, Z. (1989) en P. ERNEST (1989): *Mathematics Teaching: The State of the Art*. London. Falmer, pp. 188-194.
43. DELAMONT, S. (1978) en S. DELEMONT Y DUFFIN (eds.): *The Nineteenth Century Woman: Her Cultural and Physical World*. Beckenham. Croom Helmlij
44. FOUCAULT, M. (1980) en C. GORDON (ed.): *Power/Knowledge*. New York. Pantheon Books.
45. THOM, R. (1973) en A.G. HOWSON (ed.): *Developments in Mathematical Education*. Cambridge. Cambridge University Press, pp. 194-209.
46. HERSH, R. (1979) en *Adv.In Math.*, n. 31, pp. 31-50.
47. STEINER, H.G.: (1987) en *Far the Learning of Mathematics*, n. 7 (1), 7-13. 48. COONEY, T. J. (1988) en *Math. Teacher*, n. 80, pp. 352-363.

48. THOM PSON, A.G. (1984) en *Educational Studies in Mathematics*, n. 15, p. 105-127.
49. ERNEST, P. (1989), en P. ERNEST: *Mathematics Teaching: The State of the Art*. London. Falmer, pp. 249-254.
50. ERNEST, P. (1994) en R. BICHLER, R. SCHOLZ, R. W. STRAESSER; B. WINKELMANN (EDS.): *The Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht. Kluwer, pp. 335-349.
51. AUSUBEL, D.P., (1968): *Educational Psychology, a Cognitive View*. New York. Holt, Rinehart and Winston.
52. LACEY, C. (1977): *The Socialization of Teachers*. London. Methuen.
53. LERMAN, S. (1986): «Alternative views of the nature of mathematics and their possible influence on the teaching of mathematics». Unpublished PhD thesis. King's College, University of London.
54. ERNEST, P. (1989) en *J. Educ. Teaching*, n. 15 (1), pp. 13-33.
55. HOYLES, C. (1992) en W. GEESLIN y K. GRAHAM: *Proceedings of PME-76*. Durham. New Hampshire, n. 3, pp. 263-286.
56. HOYLES, C. (1982) en *Educational Studies in Mathematics*, n. 13, pp. 357 -372. 58. KOUBA, V.; McDONALD, J.L. (1987) en T.C. BERGERON, N. HERSCOVICS y C. KIERAN (EDS.): *Proceedings of PME-77*. Montreal. University of Montreal, n. 1, pp. 106-112.
57. KOUBA, V., y McDONALD, J.L. (1991) en *J. Mathematical Behaviour*, n. 10, pp. 105-113.
58. ERNEST, P.; GREENLAND, P. (1990) en S. PIRIE y B. SHIRE (eds.): *BSRLM 7990, Annual Conference Proceedings*. Oxford. BSRLM, pp. 23-26.
59. MASLEN, G. (1995) en *The Times Educational Supplement*, 27 de enero, p. 15.